Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique.
Université Mohammed Elbachir E!Ibrahimi de BBA.

Département d'Informatique. *Dimanche 24/01/2016.*
Section : 2ième année Licence Informatique. *Durée : 1h : 30.*

ÉPREUVE : LOGIQUE MATHEMATIQUE.

Exercice 1) ***(5pts=1+1+1+2)***

Montrer que : $A \to (B \to C), A \to B \models A \to (A \to C)$ utilisant :

a) La table de vérité
b) Les équivalences remarquables de la logique propositionnelle.
c) Le système axiomatique de Hilbert.
d) La résolution de robinson.

Exercice 2)

a) Calculer une forme normale disjonctive de : $(p_1 \to q_1) \wedge (p_2 \to q_2)$. ***(4.5pts=1.5+2+1)***

b) Soit la formule $\beta_n = (p_1 \to q_1) \wedge \ldots\ldots \wedge \ldots\ldots \wedge (p_n \to q_n)$. Supposons que la $FND(\beta_n) = C_1 \vee C_2 \vee \ldots\ldots\ldots\ldots \vee C_m$ avec C_i des clauses distinctes. Donner une relation de récurrence pour calculer la *FND* de la formule $\beta_{n+1} = (p_1 \to q_1) \wedge \ldots\ldots\ldots \wedge (p_n \to q_n) \wedge (p_{n+1} \to q_{n+1})$.

c) Déterminer la fonction $f(n)$ qui donne le nombre de clauses de la *FND* d'une formule β_n.

Exercice 3) ***(6pts=1*3+1*3)***

On considère le langage du premier ordre formé de **3** prédicats unaires ***P, I*** et ***Pr***, un prédicat binaire ***E*** et d'un symbole de constante **2**. On interprète ***P(x)*** par «**x est pair**» ; ***I(x)*** par «**x est impair**» ; ***Pr(x)*** par «**x est premier**» ; ***E(x,y)*** par «**x = y**».

a) Exprimer par une formule logique chacune des phrases suivantes :

1. Tous les nombres pairs sauf le nombre 2 ne sont pas premiers.
2. Tous les nombres premiers sauf le nombre 2 sont impairs.
3. Certains nombres premiers sont pairs **et** d'autres sont impairs.

b) Exprimer en langage naturel chacune des 3 formules suivantes :

1. $(\exists x \operatorname{Pr}(x) \wedge P(x)) \wedge (\exists x \operatorname{Pr}(x) \wedge I(x))$
2. $\forall x(P(x) \wedge \neg E(x,2) \to \operatorname{Pr}(x))$
3. $\forall x(\operatorname{Pr}(x) \wedge \neg E(x,2) \to I(x))$

Exercice 4) ***(4.5pts=1.5+1.5+1.5)***

a) - Donner un modèle de l'ensemble Ω : (P est un prédicat, g est une fonction et b est une constante).

$$\Omega : \begin{Bmatrix} P(x,z) \wedge P(y,z) \to (x \neq z); \forall x(g(x,b) = -x); \forall x \forall y \forall z(g(g(x,y),z) = g(x,g(y,z))) \\ \forall x \exists y(g(x,y) = b); \forall x \forall y(g(x,y) = g(y,x)) \end{Bmatrix}$$

b) Mettre en forme normale **prénexe** la formule suivante : $\forall x \forall y P(x,y,z) \to \exists z R(x,z) \vee R(z,y)$.

c) Mettre en forme normale de **Skolem** la formule suivante : $\forall y \exists x(P(x) \wedge \neg M(y,x) \leftrightarrow \exists z M(z,x))$.

Bon Courage !